

Uppgift 4, modellering av strömmar och spänningar i ett elektriskt nät

ET1522, *Beräknings- och simuleringsteknik*

Frida Gleisner, Anders Hultgren och Matz Lenells

27 augusti 2019

Innehåll

1	Inledning	1
1.1	Att tänka på vid inlämning av filer	1
1.2	Om uppgift 4	2
2	Modellering av en elektrisk krets	2
2.1	En differentialekvation som beskriver det elektriska nätet	3
3	Jämförelse mellan stolens och det elektriska nätets differentialekvationsmodeller	3
4	Uppgifter för aktivitet 4	4
4.1	Om relativa dämpningarna $\zeta_m = \zeta_e$ så har stegsvaren samma form	5
4.2	Exempel på hur man kan skala en lösning	5
4.3	(*Överkurs) Bestämning av β genom att kräva att $z^*(t)$ ska lösa rörelseekvationen för stolen, dvs ekvation (4.3)	7
A	Modellering av en elektrisk krets	7
A.1	Systematisk metod eller ej vid modellering	8
A.2	Ett elektriskt nät med idealiserade komponenter	9
A.3	Laddning och magnetiskt fält	9
A.4	Konstitutiva (Grundläggande) ekvationer	9
A.5	Ett elektriskt näts graf	10
A.6	Ett fullständiga träd med maximalt index	10
A.7	Ekvationsuppställning baserat på Kirchhoffs ström- och spänningslagar . . .	11
A.8	Ej del av förklaringen av den systematiska metoden - Stycke som förs in här för att kunna användas vid introduktionsföreläsningen	11
A.9	Systemet skrivet på tillståndsform	12
B	Modellering av en kontorsstol	13
B.1	Metod 2 - Systemet beskrivet på tillståndsform	15
C	Presentation som gavs vid kursintroduktionen	15

1 Inledning

1.1 Att tänka på vid inlämning av filer

Anmärkning 1. DENNA ANMÄRKNING BERÖR UPPGIFT 4. Det är möjligt att lösa uppgift 4 och använda den simulinkfil som man använde i uppgift 3. Om du löser uppgiften

på ett sådant sätt så ska du ändå lämna in den simulinkfilen i inlämningen för uppgift 4. Den som rättar er lösning för uppgift 4 vill inte leta efter filer från någon tidigare inlämningen som du har gjort.

Anmärkning 2. När ni lämnar in filer så tillfoga era namn i filnamnet. Nedan finns exempel på hur man kan skriva.

```
raypolygonAsaOrn.m  
om man heter Åsa Örn och  
raypolygonEHakansson.m  
om man heter Esmaralda Håkansson.
```

Matlab är känslig för valet av filnamn, därför bör man undvika tecken såsom å, ä och ö. Vidare ska man inte ha blanktecken i filnamn.

Det är första året¹ som vi använder Canvas. Något som skiljer Canvas från den tidigare lärplattformen är att när Canvas tar emot filer från er och vi laddar ner samtliga filer på en gång till våra datorer så lägger den till era namn samt ett antal nummer. Sen händer det ofta att Matlab inte gillar filnamnen. Lägg därför gärna de två filerna i en mapp (kallas även för katalog eller binder) och kalla mappen för T3LisaBerg om du heter Lisa Berg annars använder du ditt namn. Lämna sedan in mappen.

□

Anmärkning 3. Vi har fått in någon fil som inte går att köra. Detta kan bero på att ni har ändrat filnamnet och exempelvis använt ett ”ö” i filnamnet. För att minska risken att vi inte kan köra de filer som ni lämnar in så ber vi er att provköra just de filer som ni lämnar in. Vidare, använd en ny version av Matlab, helst inte en version som är äldre än 2017.

□

1.2 Om uppgift 4

Uppgift 4 handlar om modellering och simulering av en elektrisk krets. Vidare behandlas hur en modell för den elektriska kretsen liknar modellen för stolen som behandlas i uppgift 3. Denna likhet är ett uttryck för att elektriska och mekaniska system har en viss gemensam struktur. Vidare, om vi vill studera hur stolen uppför sig så kan vi istället studera det elektriska systemet. Vi har då en analog representation av det mekaniska systemet.

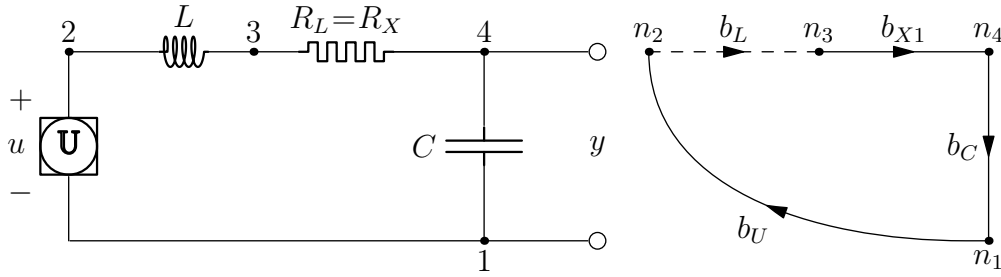
Om man har tillgång till ideala elektroniska förstärkare så kan man för varje linjär ordinär differentialekvation bygga en elektrisk krets så att man kan simulera linjära ordinära differentialekvationen, linjära ODE. Från 1940-talet och fram till åtminstone 1980-talet fanns och användes speciella maskiner, så kallade analogmaskiner, som var utformade så att det var lätt att koppla samman elektriska system så att en godtycklig linjär ODE kunde simuleras.

Ännu under 70-talet användes sådana analogmaskiner på ingenjörsutbildningar runt om i Sverige. Under 60- och 70-talets utvecklades många dataprogram som gjorde det möjligt att simulera differentialekvationer. Mathworks Simulab var ett av de första sådana program som var kommersiellt och som fick stor spridning. Programmet kom i början av 80-talet. Pga av rättighetsproblem med namnet så ändrades namnet senare till Simulink. Programmet fungerade då liksom nu ihop med programmet Matlab.

2 Modellering av en elektrisk krets

Figur 1:(a) visar ett kretsschema för ett idealt nät. Spänningskällan till vänster har spänningen u . Om inte annat sägs gäller att spänningen u är tidsberoende. Ibland använder man beteckningen $u(t)$. Efter spänningskällan följer medsols symbolerna för en induktans,

¹Detta skrivs 2019 juli 31



Figur 1: (a) Till vänster visas ett kretsschema för ett idealt elektriskt nät. I appendix A modelleras nätet med en systematisk metod och i den metoden är det naturligt att beteckna R_L med R_X . (b) Till höger visas en graf som används vid modelleringen.

en resistans och en kapacitans. L betecknar² såväl den induktans som man tänker sig finns vid symbolen för en induktans som en storhet som anger induktansen storlek, exempelvis $L = 3$ mH. Beteckningarna R_L och C har analoga betydelser. R syftar på *resistance* och C syftar på *capacitance*. I appendix A modelleras nätet med en systematisk metod och i den metoden är det naturligt att beteckna R_L med R_X .

Den elektriska kretsen är hämtad från en mycket vanlig produkt. Kretsen utgör huvuddelen av en så kallad buckomvandlare, som används för spänningsförsörjning av elektriska kretsar och apparater. De komponentvärden vi kommer att använda är hämtade från en av Ericsson Power Modules produkter.

Avsnitt A.5 redogör för figur 1:(b).

2.1 En differentialekvation som beskriver det elektriska nätet

I appendix A görs en modellering av det elektriska nätet i figur 1. Ekvation (A.18) är en modell av kretsen där $q(t)$ är kapacitansens laddning. Strömmen i är strömmen in i kapacitansen och sambandet $\frac{dq}{dt} = i(t)$ gäller. Sätt $z(t) = q(t)$. Då gäller att $\dot{z} = \dot{q} = i$. Denna likhet tillsammans med andra ekvationen i matrisekvation (A.18) ger

$$\ddot{z} = -\frac{1}{LC}z - \frac{R_X}{L}\dot{z} + \frac{1}{L}v. \quad (2.1)$$

Vi skriver om ekvation (2.1) och får

$$\ddot{z}(t) + \frac{R_X}{L}\dot{z}(t) + \frac{1}{LC}z(t) = \frac{1}{L}v(t). \quad (2.2)$$

Här används beteckningen v för spänningen över spänningskällan för att inte få en beteckningskollision med ekvationerna som beskriver kontorsstolens rörelse, se exempelvis ekvation (3.2).

3 Jämförelse mellan stolens och det elektriska nätets differentialekvationsmodeller

Stolens rörelse beskrivs av differentialekvationen, där y är stolsitsens läge,

$$\begin{aligned} (m + M)\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) &= u(t), \\ \dot{y}(0) &= 0, \\ y(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

²Lenz's name, or at least his first initial, is attached to still one more area of physics nomenclature. The symbol "L" was chosen to represent "inductance" in honor of his pioneering work in electromagnetism." Text som 2 augusti 2016 fanns på <https://nationalmaglab.org/education/magnet-academy/history-of-electricity-magnetism/pioneers/heinrich-friedrich-emil-lenz>.

Vi skriver om ekvationen för att få $\ddot{y}(t)$ ensamt som första term,

$$\ddot{y}(t) + \frac{b}{m+M}\dot{y}(t) + \frac{k}{m+M}y(t) = \frac{1}{m+M}u(t) \quad (3.2)$$

Differentialekvationerna (2.2) och (3.2) liknar varandra. Det är till och med så att om vi gör följande översättningar eller som man också säger analogier

$$\begin{aligned} \text{Laddningen } z &\leftrightarrow \text{Positionen } y, \\ \text{Strömmen } i = \dot{z} &\leftrightarrow \text{Hastigheten } \dot{y}, \\ \text{Induktansen } L &\leftrightarrow \text{Massan } m + M, \\ \text{Inversen av kapacitansen } 1/C &\leftrightarrow \text{Fjäderkonstanten } k, \\ \text{Resistansen } R_X &\leftrightarrow \text{Dämpningskonstanten } b, \\ \text{Spänningen } v &\leftrightarrow \text{Kraften } u, \end{aligned} \quad (3.3)$$

så fås likhet mellan diffekvationerna.

I fallet systemen beskrivs på tillståndsform så finns motsvarande likhet.

Karakteristiska ekvationerna för diffekvationerna (2.2) och (3.2) ges av

$$r^2 + \frac{R_X}{L}r + \frac{1}{LC} = 0 \quad (3.4)$$

$$\rho^2 + \frac{b}{m+M}\rho + \frac{k}{m+M} = 0 \quad (3.5)$$

4 Uppgifter för aktivitet 4

I uppgifterna nedan ska du utgå från att följande parametervärden gäller för det mekaniska systemet,

$$m = 5 \text{ kg}, \quad M = 75 \text{ kg}, \quad k = 25000 \text{ N/m}, \quad b = 250 \text{ Ns/m}, \quad (4.1)$$

och följande parametervärden gäller för det elektriska systemet

$$C = 100 \text{ } \mu\text{F}, \quad L = 1.5 \text{ } \mu\text{H}. \quad (4.2)$$

Värdet på resistansen R_X , se ekvation (2.2), bestäms i uppgift b.

Värdet på dämpningskonstanten är lågt för att systemet ska svänga mycket. Vi tror att det gör det lite enklare att göra uppgifterna nedan.

- Simulera det mekaniska systemet (3.2) och plotta position och hastighet. I detta fall ska insignalen, kraften till systemet, vara ett steg med storleken Mg . Detta har du genomfört i uppgift 3.
- Simulera det elektriska systemet (2.2) eller (A.16) med de föreslagna värdena på L och C . Välj insignalen v till det elektriska systemet till $v = \gamma u$ där u är ett enhetssteg och γ är en parameter som väljs så att slutvärdet blir det samma som för det mekaniska systemet. Vidare, välj R_X så att samma kurvform erhålls vid insvängning mot slutvärdet för det elektriska systemet som för det mekaniska. I avsnitt 4.1 beskrivs den teoretiska bakgrunden till att detta är möjligt, se speciellt ekvation (4.6).

Det elektriska systemet rör sig mycket snabbt. Om du börjar att simulera systemet för ett visst intervall $[0, t_{final}]$ där t_{final} är som för det mekaniska systemet så ser du bara utsignalen som en horisontell linje. Minska då intervallets längd i omgångar med en faktor 10 till dess du ser ett stegsvar som svänger.

- (c) I avsnitt 4.1 ges en bakgrund även för denna uppgift. Tag signalen z som du beräknade i uppgift b. Skala om tiden, dvs finn ett β och plotta $z^*(t)$ och $y(t)$ i samma figur. Då ska kurvorna ligga på varandra. Eftersom det är svårt att se om kurvorna ligger på varandra, förskjut den ena kurvan med en liten konstant i höjddled så att kurvorna nästan ligger på varandra.

Redovisa figuren. Av koden ska det framgå vilket β du använder. Skriv gärna ut β :s värde i figurens huvud. Dvs i huvudet ska det stå exempelvis $\beta = 230$. Talet 230 är bara ett exempel. Du får själv räkna ut eller pröva dig fram till β :s värde.

4.1 Om relativa dämpningarna $\zeta_m = \zeta_e$ så har stegsvaren samma form

Ekvationer (2.2) och (3.2) är andra ordningens differentialekvationer och de har en mycket intressant egenskap. Låt oss skriva den karakteristiska ekvationen (3.5) för det mekaniska systemet enligt

$$\rho^2 + 2\zeta_m\omega_m\rho + \omega_m^2 = 0. \quad (4.3)$$

För att denna ekvation ska vara lika med ekvation (3.5) så ska följande likheter gälla

$$\begin{cases} 2\zeta_m\omega_m &= \frac{b}{m+M} \\ \omega_m^2 &= \frac{k}{m+M} \end{cases} \quad \begin{cases} \zeta_m &= \frac{\frac{b}{m+M}}{2\sqrt{\frac{k}{m+M}}} = \frac{b}{2\sqrt{k(m+M)}} \\ \omega_m &= \sqrt{\frac{k}{m+M}} \end{cases} \quad (4.4)$$

Från samband (4.1) följer direkt att $\frac{k}{m+M} > 0$ och att $k(m+M)$ så rötterna av dessa tal är definierade som vanliga positiva reella tal. Vidare ska $\zeta_m \in (0, 1)$. Om inte ζ_m ligger i detta intervall är problemet felformulerat.

På motsvarande sätt kan ekvation (3.4) skrivas på formen

$$r^2 + 2\zeta_e\omega_e r + \omega_e^2 = 0 \quad (4.5)$$

Den intressanta egenskapen är att om

$$\zeta_e = \zeta_m \quad (4.6)$$

och insignalerna till båda systemen (2.2) och (3.2) är steg och initialvillkoren är noll så kommer stegsvaren ha samma form.

Dock, det elektriska systemets stegsvar är mycket snabbare än det mekaniska. För att kunna hålla isär de två systemens tidskalor inför vi tiden τ och den reella parametern β så att $t = \beta\tau$. Vidare inför vi funktionen $z^*(t) = z(\tau) = z(t/\beta)$.

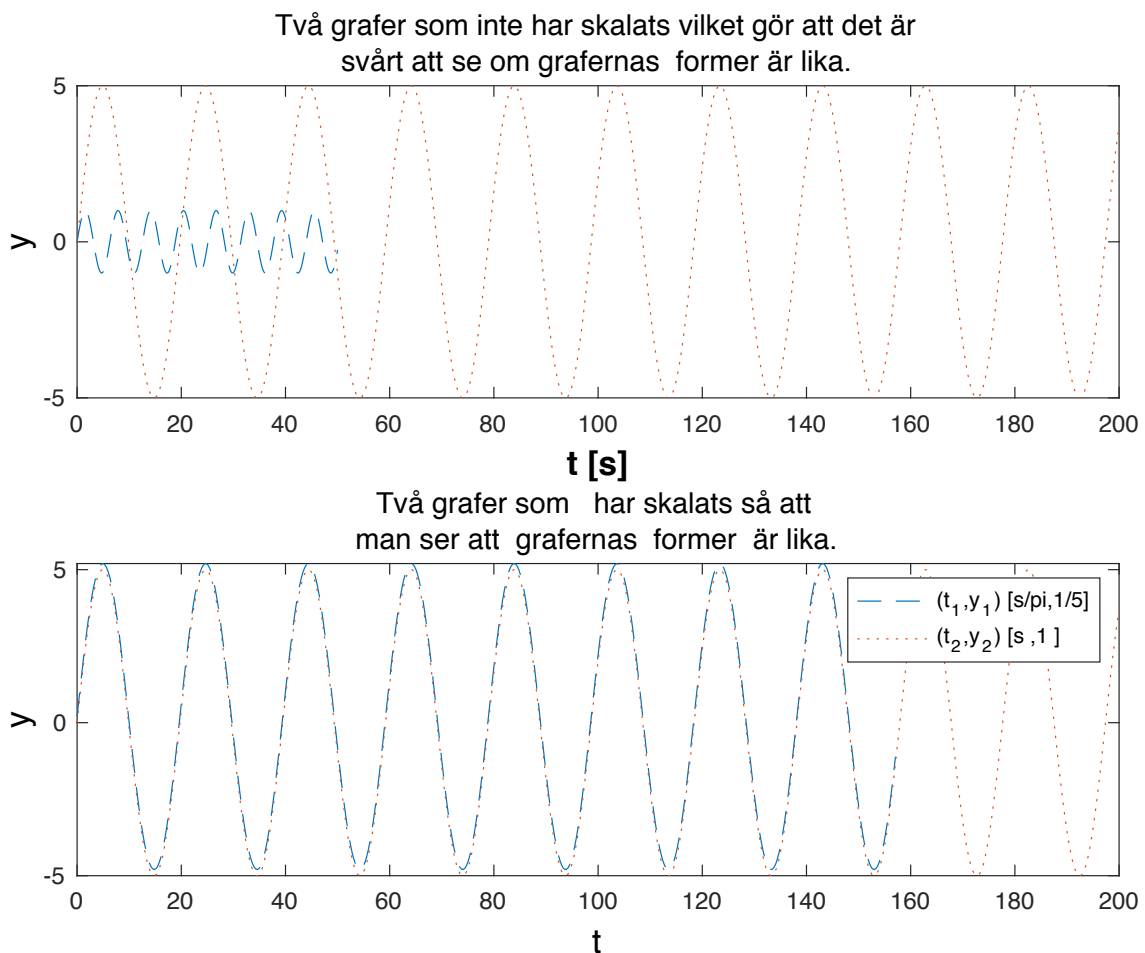
Genom att välja β till ett lämpligt värde så kan man få likheten $z^*(t) = y(t)$. I vårt fall gäller att $\beta \gg 1$ eftersom det elektriska systemet är mycket snabbare än det mekaniska.

För att bestämma β så kan du använda den metod som används i exempel 4.1. Man kan även göra på ett annat sätt, se avsnitt 4.3.

4.2 Exempel på hur man kan skala en lösning

Här följer ett exempel som vill förklara hur man kan göra för att skala om en lösningskurva så att den kan jämföras med en annan lösningskurva. I exemplet så skalas även amplituden. Antag att man väljer parametern γ i uppgiften till hälften av sitt korrekta värde. isåfall behöver man skala amplituden med faktorn 2 för att kurvorna ska ligga ovanför varandra.

Exempel 4.1 (Skalning av tiden och amplituden). Här visas ett enkelt exempel på två kurvor som har samma form men som är skalade olika i amplituden och i tiden, se övre diagrammet i figur 2. Matlabkoden som genererar kurvorna i nämnda figur ges här nedan



Figur 2: Illustration som används i exempel 4.1.

i detta exempel. De fyra första raderna definierar kurvorna och de raderna ska man helst inte bry sig om.

I övre diagrammet i figur 2 ser man de ursprungliga graferna. I undre diagrammet visas graferna där första grafen har skalats om. Här har vi använt olika linjetyper för att kunna skilja graferna åt. Vi har även förskjutit kurvorna i förhållande till varandra i det undre diagrammet. Om man har samma linjetyper för graferna så behöver man i detta fall nog göra en förskjutning, lämpligen i höjddled, för att kunna se att det är två grafer.

Tanken är att man ska studera de två kurvorna i övre diagrammet och att man då observerar att kurvorna verkar ha liknande form men kurvorna är olika stora både i x - och y - led. För att undersöka om kurvorna har samma form skulle man kunna börja med att att ändra tidskalan med faktorn 3. Det gör man med kommandot

```
plot(t_1*3, y_1, '--', t_2, y_2, ':')
```

När man har gjort det tycker man nog att amplituden skiljer sig åt och man justerar den genom att försöka med att plotta kurvorna

```
plot(t_1*3, 4*y_1, '--', t_2, y_2, ':')
```

Då ser man att kurvorna inte ligger riktigt över varandra men bra nära. Sen fortsätter man att justera och man kanske nöjer sig när man exempelvis plottar

```
plot(t_1*3.1, 5*y_1, '--', t_2, y_2, ':')
```

Nu är ju siffrorna i det här exemplet valda så att där det står 3.1 ska det vara faktorn π för att det ska bli exakt och faktorn 5 är exakt. Men om vi tänker oss att man inte tittar på

de fyra första satserna i koden så vet man ju inte att det ska vara faktorn π . Det är inget som hindrar att man istället försöker med faktorn 4.95 och att man sedan kanske är nöjd. Dock är det långsökt att man hinner försöka med faktorn 4.95 innan man har försökt med faktorn 5.

```
t_1 = 0:0.1:50;
y_1 = sin(t_1);
t_2 = 0:0.1:200;
y_2 = 5*sin(t_2/pi);
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t_1, y_1, '--', t_2, y_2, ':')
title({'Två grafer som inte har skalats vilket gör att det är';...
      'svårt att se om grafernas former är lika.'},...
      'FontSize',12,'FontWeight','normal','Color','black')
xlabel('t [s]', 'FontSize',14,'FontWeight','bold','Color','black')
ylabel('y', 'FontSize',14,'FontWeight','normal','Color','black')
subplot(2,1,2)
plot(t_1*pi, 5*y_1+0.2, '--', t_2, y_2, ':')
title({'Två grafer som har skalats så att ';...
      'man ser att grafernas former är lika.'},...
      'FontSize',12,'FontWeight','normal','Color','black')
xlabel('t', 'FontSize',14,'FontWeight','normal','Color','black')
ylabel('y', 'FontSize',14,'FontWeight','normal','Color','black')
legend('(t_1,y_1) [s/pi,1/5]', '(t_2,y_2) [s,1]')
```

□

4.3 (*Överkurs) Bestämning av β genom att kräva att $z^*(t)$ ska lösa rörelseekvationen för stolen, dvs ekvation (4.3)

Om man kräver att $z^*(t)$ ska uppfylla samma diffekvation som $y(t)$, dvs ska uppfylla

$$\frac{d^2 z^*(t)}{dt^2} + 2\zeta_m \omega_m \frac{dz^*(t)}{dt} + \omega_m^2 = 0 \quad (4.7)$$

och därefter utnyttjar följande likheter

$$\frac{dz^*(t)}{dt} = \frac{dz(\tau)}{dt} = \frac{dz(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\beta} \frac{dz(\tau)}{d\tau} \quad (4.8)$$

$$\frac{d^2 z^*(t)}{dt^2} = \frac{d^2 z(\tau)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dz(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right) = \frac{1}{\beta} \frac{d}{dt} \frac{dz(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\beta} \frac{d \frac{dz(\tau)}{d\tau}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} \quad (4.9)$$

samt att $z(\tau)$ uppfyller diffekvationen

$$\frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} + 2\zeta_e \omega_e \frac{dz(\tau)}{d\tau} + \omega_e^2 = 0 \quad (4.10)$$

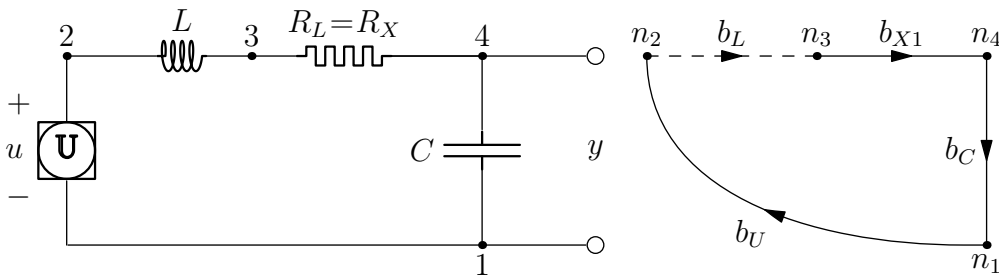
kan man bestämma β .

A Modellering av en elektrisk krets

Om du känner dig hemma med modellering av elektriska kretsar kan du direkt fortsätta läsa från ekvation (A.12) och därefter från ekvation (2.1). Ifall du inte känner igen beteckningarna i ekvation (A.12) kan du istället utgå ifrån ekvationerna (A.20) och (A.21) och

därefter backa dig tillbaka i ekvationerna. Ett annat sätt att förstå ekvationerna är att utgå ifrån ekvation (A.8).

Om du vill lära känna en systematisk metod för att modellera elektriska kretsar så försök då att läsa härifrån. Figur 3:(a) visar ett kretsschema för ett idealt nät. Spänningskällan



Figur 3: Upprepning av figur 1. (a) Till vänster visas ett kretsschema för ett idealt elektriskt nät. (b) Till höger visas en graf som används vid modelleringen.

till vänster har spänningen u . Om inte annat sägs gäller att spänningen u är tidsberoende. Ibland använder man beteckningen $u(t)$. Efter spänningskällan följer med symbolerna för en induktans, en resistans och en kapacitans. L betecknar³ såväl den induktans som man tänker sig finns vid symbolen för en induktans som en storhet som anger induktansen storlek, exempelvis $L = 3 \text{ mH}$. Beteckningarna R_L och C har analoga betydelser. R syftar på *resistance* och C syftar på *capacitance*.

Den elektriska kretsen är hämtad från en mycket vanlig produkt. Kretsen utgör huvuddelen av en så kallad buckomvandlare, som används för spänningsförsörjning av elektriska kretsar och apparater. De komponentvärden vi kommer att använda är hämtade från en av Ericsson Power Modules produkter.

Avsnitt A.5 redogör för figur 3:(b).

A.1 Systematisk metod eller ej vid modellering

All modellering av elektriska nät utgår ifrån Kirchhoffs ström- och spänningslagar samt konstitutiva (grundläggande, väsentliga) ekvationer. För enkla nät, såsom det vi har här, går det oftast utmärkt att bara gissa sig till hur man ska tillämpa nämnda lagar och ekvationer. Om det finns fler än sammanlagt två induktanser och kapacitanser så kan det vara svårt att ställa upp rätt ekvationer och ställa upp dessa på lämplig form så att man kan se hur det erhållna differentialalgebraiska systemet ska lösas. Därför behöver man, utom för de enklaste fallen av elektriska nät, använda någon typ av systematisk metod när man ställer upp ett näts ekvationer.

Här använder vi en sådan systematisk metod, inte för att det är nödvändigt, nätet är enkelt, utan för att vi vill demonstrera metoden. En fullständig genomgång av metoden skulle kräva många sidors förklaringar och många exempel. Vi hoppas att förklaringarna här ska vara tillräckliga för detta exempel samt att presentationen ska väcka nyfikenhet för att använda metoden på svårare problem.

Om det verkar ogörligt att förstå teorin som presenteras nedan gå då till matrisekvation (A.8) som beskriver 3 ekvationer baserat på Kirchhoffs strömlag och en ekvation baserat på Kirchhoffs spänningslag. Studera sedan hur ekvationerna (A.12) och (A.13) kan härledas från matrisekvation (A.8).

Förutom att den presenterade metoden alltid ger ekvationer som går att lösa så ger metoden ett differentialalgebraiskt system som framhäver att systemet har en viss struk-

³“Lenz’s name, or at least his first initial, is attached to still one more area of physics nomenclature. The symbol “L” was chosen to represent “inductance” in honor of his pioneering work in electromagnetism.” Text som 2 augusti 2016 fanns på <https://nationalmaglab.org/education/magnet-academy/history-of-electricity-magnetism/pioneers/heinrich-friedrich-emil-lenz>.

tur. Utrymmet här tillåter inte oss att utveckla denna fråga mer utan vi hänvisar till litteraturen.

A.2 Ett elektriskt nät med idealiserade komponenter

När man ritar kretsschemor som ska användas för att modellera elektriska kretsar så använder man symboler för induktanser, kapacitanser, resistanser och andra nätelement. Gemensamt för dessa nätelement är att vi betraktar dem som ideala, de lyder under speciella lagar, de så kallade konstitutiva ekvationerna.

När vi valde nätet i figur 3 så utgick vi ifrån en del av en buckomvandlare som är en vanlig typ av en elektrisk kraftomvandlare. I buckomvandlaren svarar induktansen L och resistansen R_L mot en induktor. En resistans i ett kretsschema behöver alltså inte svara mot en resistor. Kapacitansen C svarar mot den utgångskondensator som en buckomvandlare alltid har. Även denna utgångskondensator har en resistans men vi valde att bortse ifrån denna för att göra exemplet enkelt.

I modern elektronik, speciellt i kraftelektronik, undviker man i det längsta att använda resistorer eftersom dessa orsakar effektförluster. Kretsscheman för kraftomvandlare innehåller därför ofta resistanser som är delar av modeller för induktorer och kondensatorer. Sådana resistanser kallas ibland för parasitresistanser.

A.3 Laddning och magnetiskt fält

En symmetriskt uppladdat plattkondensator⁴ har laddningen q på ena plattan och laddningen $-q$ på den andra plattan. Man brukar säga att kondensatorn har laddningen q . Laddningen q är lätt att tänka sig eftersom vi utgår ifrån att den består av elektroner. Nu har visserligen elektronen en negativ laddning så ska vi tänka oss en positiv laddning så svarar det mot ett underskott på elektroner. Ett viktigt samband mellan laddning och ström är

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (\text{A.1})$$

Du kan här tänka dig att i är strömmen till en kondensatorplatta. Om i är positiv så kommer laddningen q på plattan att öka.

En induktor genom vilken det går en ström kommer att omge sig med ett magnetiskt flöde φ . Låt induktorn vara ideal, dvs antag att den är en induktans, då gäller att

$$u_L = \frac{d\varphi}{dt} \quad (\text{A.2})$$

där u_L är spänningen över induktansen. Ett magnetiskt fält är betydligt svårare att tänka sig än en laddning. Detta är i alla fall vad författarna tycker.

A.4 Konstitutiva (Grundläggande) ekvationer

För de ideala nätelementen resistans R , kapacitans C och induktans L finns följande tre konstitutiva ekvationer:

$$Ri = u, \quad Cu = q \quad \text{och} \quad \varphi = Li. \quad (\text{A.3})$$

i betecknar här strömmen genom komponenten och u spänningen över komponenten. Vi har redan nämnt att q är laddningen på kondensatorn och φ är det magnetiska fältet som finns runt induktansen.

⁴Resonemanget gäller för alla kondensatorer så när som på att kondensatorer lagrar laddning på olika sätt.

A.5 Ett elektriskt näts graf

Figur 3:(b) visar ett antal grenar och noder. Grenarna har beteckningar som b_U där b syftar på *branch* och U syftar på spänningskälla. Noderna betecknas med n_i där $i \in \{1, \dots, 4\}$. Varje gren svarar mot en komponent. Vi har redan nämnt att grenen b_U svarar mot spänningskällan U . Grenen b_L svarar mot induktansen L , b_X mot resistansen R_L och b_C mot kapacitansen C . I avsnitt A.6 förklaras varför vi använder indexet X och inte R som kan verka mer naturligt. Varje gren börjar i en nod och slutar i en annan nod och illustreras av en heldragen eller streckad linje. Exempelvis börjar grenen b_L i noden n_2 och slutar i noden n_3 . Vi behöver representera grenarna, noderna och hur dessa hänger samman. Vi skulle kunna göra detta med en tabell men det är enklare och mer intuitivt att visa detta som det är gjort i figur 3:(b) och en sådan figur kallar vi för en graf. Därför kallar vi en representation av grenarna, noderna och hur dessa hänger samman för just en graf, även om representationen görs med en tabell.

Man vill att grafen, åtminstone när det bokstavligen är en graf, visuellt ska likna kretsschemat så att det är enkelt att orientera sig. I kretsschemat finns fem punkter markerade på ledningarna. I detta fall har vi valt att placera de 4 noderna så att de inbördes förhåller sig till varandra ungefär som de fem punkterna.

Det är vanligt att man i ett kretsschema ritar ett linjesegment antingen vågrätt eller lodrätt. Linjerna mellan de olika symbolerna svarar mot ledningar som antas vara ideala. Det betyder att det inte finns något spänningsfall mellan en ledares två ändar, oberoende av ledningsströmmen. Exempelvis har ledaren mellan kapacitansen C och spänningskällan U , tre segment, ett lodrätt segment följs av ett vågrätt och sedan ett lodrätt segment. I grafer använder man däremot bågformiga linjer mellan noderna när man inte vill använda helt raka linjer mellan linjens två noder. Grenen b_U skulle ha kunna dragits rakt mellan noderna n_1 och n_2 . Dock, genom att dra grenens linje i en båge så kommer linjen närmare spänningskällan U varför det är lättare att förstå att grenen b_U svarar mot spänningskällan U .

Ledningsstumparna som går fram till utgången till höger finns inte med i grafen eftersom det inte finns några komponenter i dessa ledningsstumpar.

A.6 Ett fullständiga träd med maximalt index

I grafteorin används begreppet träd och det beror på att ett träd i en graf delar viktiga topologiska egenskaper med ett vanligt träd. Var man än är i ett fysiskt träd kan man genom att följa trädets grenar komma till en godtyckligt vald annan plats i trädet. I denna liknelse tänker man sig att stammen är en gren. Dessutom finns det bara en väg mellan platserna. Detta är exakt de egenskaper man önskar för ett träd i en graf. Heldragna linjer i grafen svarar mot grenarna i grafens träd. Det träd vi behöver ska ha ytterligare en egenskap. Trädets grenar ska nå alla noder. Om det gör det säger man att trädet är fullständigt. Den streckade linjen svarar mot en gren som kallas för en länk. Metodens första steg är att välja ett träd i grafen, dvs välja grenar som ska ingå i trädet.

Alla spänningskällor ska svara mot trädgrenar och alla strömkällor ska svara mot länkar. Vidare ska man välja ett träd som är sådant att summan av antalet kapacitanser i trädgrenar och antalet induktanser i länkar är maximalt.

Man behöver skilja mellan resistanser som finns i trädgrenar och sådana som finns i länkar. En trädgren som svarar mot en resistans betecknas med b_{X_i} där i är ett heltal. När det bara finns en resistans i trädgren så kan man skriva b_X . På motsvarande sätt betecknas en länk som svarar mot en resistans med b_{Y_i} .

A.7 Ekvationsuppställning baserat på Kirchhoffs ström- och spänningslagar

Till varje gren definierar vi en spänning, grenspänning, och en ström, grenström. Spänningar betecknas enligt mallen u_U för grenen b_U , u_L för grenen b_L osv. Strömmarna betecknas på analogt vis. Exempelvis betecknar i_U strömmen genom spänningskällan U . Vi väljer att ha följande teckenkonvention. Varje gren i grafen har en pil som definierar en riktning för grenen. Noden från vilken grenen kommer ifrån kallar vi för grenens svansnod och noden som grenen går till kallar vi för grenens huvudnod. Grenen b_X har svansnoden n_3 och huvudnoden n_4 . Om strömmen går i pilens riktning så är strömmen positiv. Om strömmen, i_X genom resistansen $R_L = R_X$ är positiv så fås ett spänningsfall över resistansen. Vi definierar då att spänningen $u_X = (R_X) \cdot (i_X)$. Allmänt definierar vi en grenspänning som positiv om potentialen i grenens svansnod är högre än i potentialen i grenens huvudnod. Detta får som följd att $u_U = -u$.

Antag att man har skapat ett träd som följer reglerna i avsnitt A.6. Då ska man göra följande: Tag bort den första trädgrenen, i vårt fall är det b_U . Då fås två mängder med noder som hänger ihop med trädgrenar, dels mängden $\{n_2\}$ och dels $\{n_1, n_3, n_4\}$. Kirchhoffs strömlag ger att strömmarna som går mellan dessa mängder summeras till noll. Det betyder att

$$i_u - i_L = 0 \quad (\text{A.4})$$

Sen upprepar man denna beräkning för fallet då trädgren b_C tas bort. Då fås de två nodmängderna $\{n_1, n_2\}$ och dels $\{n_3, n_4\}$. Ekvationen som svarar mot ekvation (A.4) är i det fall

$$i_C - i_L = 0 \quad (\text{A.5})$$

Man upprepar detta förfarande för den tredje och sista trädgrenar och får därmed de tre övre raderna i matrisekvation (A.8).

Därefter utgår man igen från trädet men denna gång lägger man till länken b_L . Då fås en slinga och för den slingan gäller Kirchhoffs spänningslag som i detta fall ger ekvationen

$$u_L + u_U + u_X + u_C = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$(\text{A.7})$$

som är den fjärde ekvationen i matrisekvation (A.8),

$$\begin{pmatrix} i_U \\ i_C \\ i_X \\ u_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_U \\ u_C \\ u_X \\ i_L \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

De fem ekvationerna som finns i matrisekvation (A.8) har en entydig lösning vilket vi visar i nästa avsnitt.

A.8 Ej del av förklaringen av den systematiska metoden - Stycke som förs in här för att kunna användas vid introduktionsföreläsningen

Detta är inte en del av förklaringen av den systematiska metoden utan finns här för att kunna användas under en introduktionsföreläsning av uppgift 4.

Här följer omskrivning av ekvation A.6 där parametrarna som introduceras i avsnitt 2.1 används.

$$u_L + u_U + u_X + u_C = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$L \frac{di}{dt} - v + Ri + \frac{1}{C}q = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$L\ddot{z} - v + R\dot{z} + \frac{1}{C}z = 0 \quad (\text{A.11})$$

A.9 Systemet skrivet på tillståndsform

Vi betecknar kapacitansen laddning med q och induktansens magnetiska fält med φ . Ekvationsraderna 2 och 4 i matrisekvation (A.8) kan då skrivas enligt

$$\begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q/C \\ \varphi/L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u_X + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u_U. \quad (\text{A.12})$$

Ekvationerna 3 och 4 i matrisekvation (A.8) kan då skrivas enligt

$$i_X = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} q/C \\ \varphi/L \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Ekvationerna (A.12), (A.13) och ohms lag ger att

$$\begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q/C \\ \varphi/L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} R_X (0 \quad 1) \begin{pmatrix} q/C \\ \varphi/L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u_U. \quad (\text{A.14})$$

Detta ger ekvationerna

$$\begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -R_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q/C \\ \varphi/L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u_U. \quad (\text{A.15})$$

Vi skriver om ekvationerna så de får den typiska formen för en tillståndsmodell. I tillståndsmodellen använder vi insignalen $v = u = -u_U$ och får

$$\begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -R_X/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v. \quad (\text{A.16})$$

Vi använder beteckningen v för att inte senare få en beteckningskollision. Om vi löser denna ekvation så kan vi enkelt beräkna nätets samtliga grenströmmar och grenspänningar.

Om man istället för det magnetiska flödet φ använder strömmen $i = i_L = \varphi/L$ fås följande system

$$\begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -R_X/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ Li \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/C & -R_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v. \quad (\text{A.17})$$

Vi hyfsar till denna ekvation och får

$$\begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/(LC) & -R_X/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \end{pmatrix} v. \quad (\text{A.18})$$

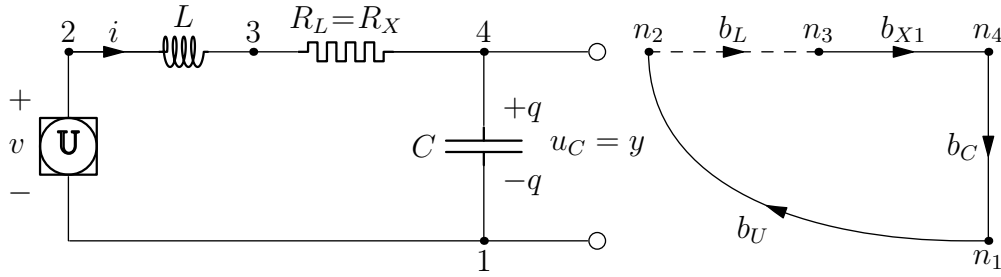
Med användning av ekvationen $Cu_C = q$, där u_C betecknar spänningen över kapacitansen, fås att ekvation (A.17) kan skrivas på formen

$$\begin{pmatrix} C \frac{du_C}{dt} \\ L \frac{di}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -R_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_C \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v. \quad (\text{A.19})$$

Vi skriver även sambandet (A.19) som enskilda ekvationer

$$i - C \frac{du_C}{dt} = 0 \quad \text{Kirchhoffs strömlag}, \quad (\text{A.20})$$

$$L \frac{di}{dt} + R_X i + u_C - v = 0 \quad \text{Kirchhoffs spänningslag}. \quad (\text{A.21})$$



Konstitutiva ekvationerna:

$$R_X i = u_X, \quad C u_C = q, \quad \varphi = Li \Rightarrow u_L = \frac{d\varphi}{dt} = L \frac{di}{dt}.$$

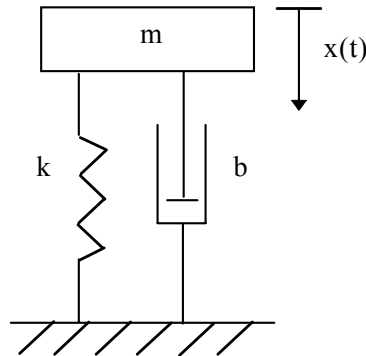
$$i - C \frac{du_C}{dt} = 0, \quad \text{Kirchhoffs strömlag,}$$

$$L \frac{di}{dt} + R_X i + u_C - v = 0, \quad \text{Kirchhoffs spänningslag.}$$

Figur 4: Upprepning av figur 1 som är tänkt att användas under en föreläsning av uppgift 4. (a) Till vänster visas ett kretsschema för ett idealt elektriskt nät. (b) Till höger visas en graf som används vid modelleringen. (c) Nedanför det elektriska nätet finns de konstitutiva ekvationerna i just detta fall samt en modellering av det elektriska nätets spänningar och strömmar på ett konventionellt sätt.

B Modellering av en kontorsstol

Här finns av bekämlighetsskäl med ett par sidor från dokumentet *Uppgift 3 och introduktion till Simulink*.



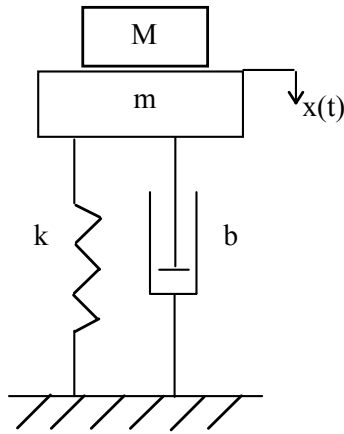
Figur 5: Enkel modell av en kontorsstol. Variabeln $x(t)$ skulle ha bytts ut mot $y(t)$.

Figur 5 visar en förenklad bild av en kontorsstol. Modellen består av en massa (massan består här av sitsens massa), en ideal dämpare och en ideal fjäder. Vi väljer $y = 0$ vid jämviktsläget för stolen innan någon sätter sig på den.

Om någon sätter sig på stolen, någon med en vikt som inte överstiger den som stolen är byggd för, kommer sitsen att gunga till och finna ett nytt jämviktsläge där y är större än noll. Vi illustrerar detta i figur 6. Förändringen representeras av att massan ökar från m till $m + M$, där M representerar massan för personen som sätter sig på stolen, se figur 6. I appendix härleds utgående från Newtons andra lag att följande differentialekvation gäller efter det att personen har satt sig på stolen,

$$(m + M)\ddot{y}(t) = -b\dot{y}(t) - ky(t) + Mg. \quad (\text{B.1})$$

Den tillagda vikten, termen Mg , kan ses som en insignal till systemet, se figur 7. Om vi



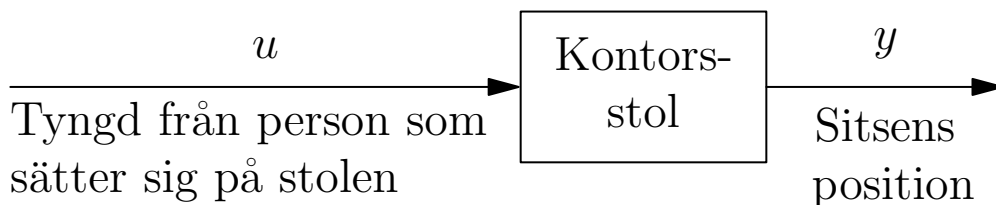
Figur 6: Modell av kontorsstol där massan för personen som sätter sig är tillagd. Variabeln $x(t)$ skulle ha bytts ut mot $y(t)$.

kallar insignalen för $u(t)$ kan ekvation (B.1) skrivas enligt

$$(m + M)\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t). \quad (\text{B.2})$$

I vårt fall med kontorsstolen antar $u(t)$ två värden, $u = 0$ innan någon har satt sig på stolen och $u = Mg$ efter att personen har satt sig på stolen. Eftersom vi vill studera rörelsen hos systemet väljer vi att börja simulering när personen sätter sig på stolen vid tiden $t = 0$. Vi får

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ Mg & 0 \leq t. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$



Figur 7: Kontorsstolen är ett system där tyngden från en person som sätter sig på sitsen kan ses som en insignal som ändrar sitsens position från dess initiala jämviktsposition.

Att lösningen $y(t)$ ska uppfylla ekvation (B.2) är inte tillräckligt för att bestämma lösningen entydigt, ytterligare villkor behövs. Normalt brukar man ange så kallade initialvillkor och i vårt fall antar vi att stolen står still i sitt jämviktsläge innan personen sätter sig varför vi skriver vårt systemet enligt

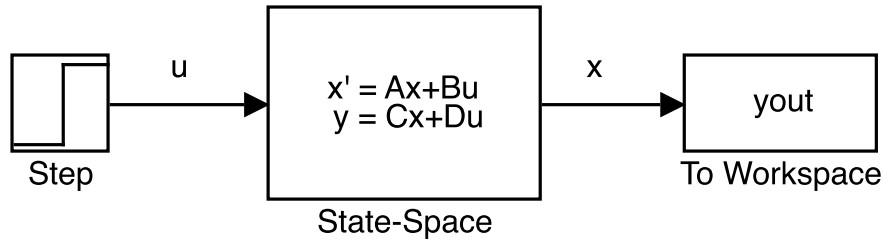
$$\begin{aligned} (m + M)\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) &= u(t), \\ \dot{y}(0) &= 0, \\ y(0) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Anmärkning 4. Eftersom vi tänker oss att personen sätter sig på stolen vid tiden $t = 0$ så kan man tycka att införandet av insignalen $u(t)$ är att överarbeta problemformuleringen. Motivet för att ändå införa en insignal är att problemställningen lätt kan utvidgas eller modifieras. Typiskt tänker man sig att systemet befinner sig i vila vid en viss tidpunkt

$t_{start} < 0$ och sedan händer något vid tiden $t = 0$ och det som händer är att insignalen u ändras från att vara noll till att bli skild från noll, exempelvis bli ett eller bli en signussignal. Figur 8 illustrerar ett fall då u är en stegfunktion.

□

B.1 Metod 2 - Systemet beskrivet på tillståndsform



Figur 8: Blockschema då systemet beskrivs på tillståndsform.

Vi inför hjälpvariablerna $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$ och kan då skriva om differentialekvation B.2 enligt

$$(m + M)\dot{x}_2(t) + bx_2(t) + kx_1(t) = u(t), \quad (\text{B.5})$$

där

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (\text{B.6})$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m + M}x_1 - \frac{b}{m + M}x_2 + u(t).$$

Hjälpvariablerna x_1 och x_2 kallas för tillstånd och ekvationerna ovan kallas för tillståndsekvationer. För att göra vår andra typ av simulering i Simulink skriver vi tillståndsekvationerna på matrisform. Tillstånden läggs in i m-filen som matriser. För ekvation B.6 fås matriserna

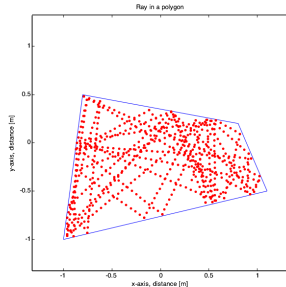
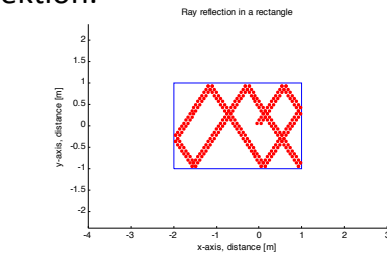
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_{x'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m+M} & \frac{-b}{m+M} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_B u. \quad (\text{B.7})$$

C Presentation som gavs vid kursintroduktionen

Vid kursintroduktionen gavs följande presentation, se följande 4 sidor.

Sommarkursen består av fyra simuleringssuppgifter

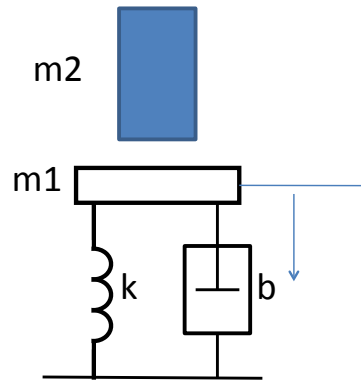
1. Simulering av tvådimensionell grafik
- reflektion.



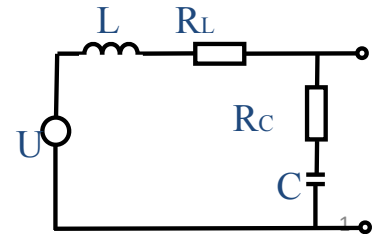
2. Tvådimensionell grafik
- linjär avbildning.



3. Simulering av person som sätter sig på kontorsstol
- simulering av dynamiskt system.

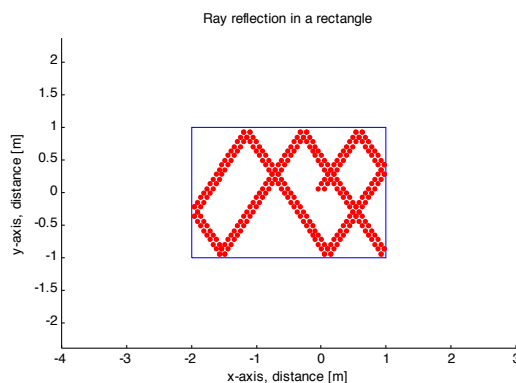


4. Simulering av elektrisk krets.



Förberedande uppgift

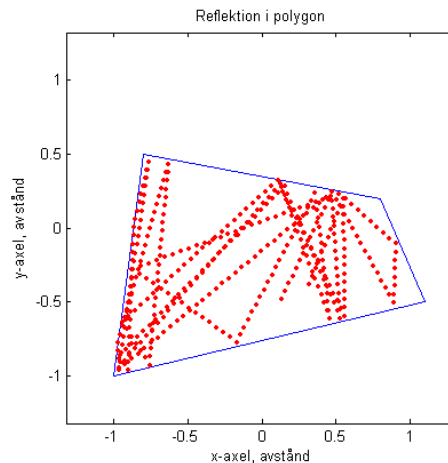
Som en förberedelse inför inlämningsuppgifterna ska du bekanta dig med Matlab. Följ instruktionerna i dokumentet "**En mycket kort introduktion till Matlab**". Du kommer bland annat studera ett program som genererar en stråle som studsar i en rektangel. I samband med att du kör programmet kan du även ta del av dokumentet "**Några programmeringsbegrepp**".



Uppgift 1

I uppgift 1 ska du själv skriva ett program som genererar en stråle som studsar i en polygon.

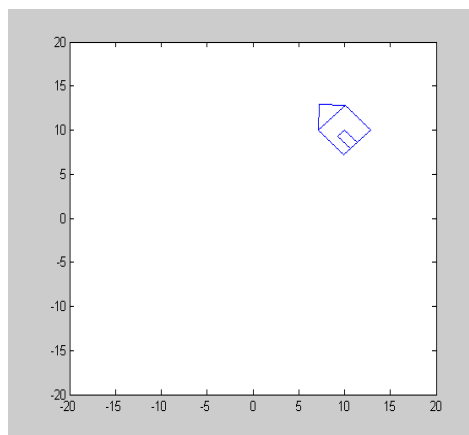
Titta först på presentationen **”Inför uppgift 1”** och följ sedan instruktionerna i dokumentet **”Instruktioner och lösningsförslag till uppgift 1”**



Uppgift 2

I uppgift 2 ska du skriva ett program som ritar ett hus som flyttas med hjälp av linjära avbildningar.

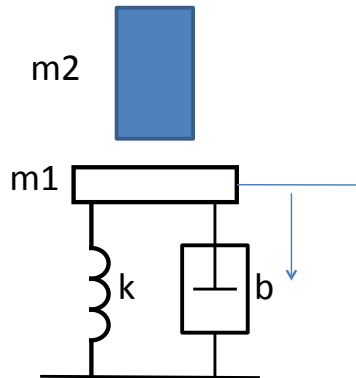
Titta först på presentationen **”Inför uppgift 2”** och följ sedan instruktionerna i dokumentet **”Instruktioner och lösningsförslag till uppgift 2”**



Uppgift 3

I uppgift 3 ska du i Simulink programmera en simulering av ett andra ordningens system som kan likna en kontrorsstol. Händelsen som simuleras är när en person sätter sig.

Titta först på presentationen ”**Inför uppgift 3**” och följ sedan instruktionerna i dokumentet ”**Instruktioner och lösningsförslag till uppgift 3**”



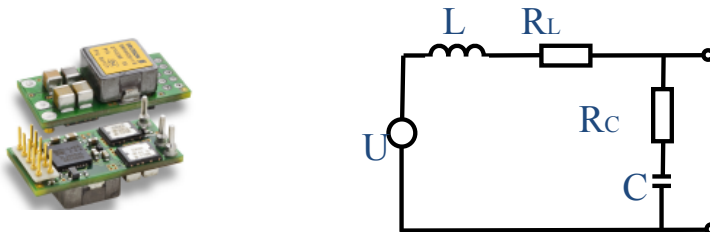
Uppgifterna 1, 2 och 3 bokförs enligt betygssystemet i Ladok att motsvara Inlämningsuppgift 1 om 1,5 hp.

Uppgift 4

Som uppgift 4 ska du i Simulink programmera en simulering av ett elektriskt nät av andra ordningen. Den elektriska kretsens princip är hämtad från en DC/DC-omvandlare som används i försörjningssystem för elektronik. Närmare bestämt är kretsen hämtad från Ericsson Power Modules kretsar, som tex. Används som del i kraftförsörjningen i telekommunikations-system.

Närmre beskrivning kommer senare.

Uppgift 4 genomförs på ett liknande sätt som Uppgift 3, stolen.



Uppgift 4 bokförs enligt betygssystemet i Ladok att motsvara Inlämningsuppgift 2 om 1,5 hp.

Extra uppgift

I en extra uppgift kan du ta del av en simulering av händelsen när en person sätter sig på stolen med detektion av personens vikt. Tanken är att personens vikt estimeras när personen sätter sig med syfte att innan stolen sänker sig för mycket avgöra personens vikt och möjligen videra någon åtgärd om vikten är för hög.

Uppgiften är tänkt att illustrera den typ av beräkningar som kan göras inom kurspaketet Diagnos på distans.

Titta först på presentationen **"Extra uppgift"** och kör sedan simuleringen med de medföljande filerna och gör egna modifieringar.

